3.10. **Aturan Rantai Dan Perluasan Turunan Suatu Fungsi**

3.10.1. **Aturan Rantai**

Aturan-aturan yang telah dijelaskan di atas belum cukup untuk menentukan turunan dari fungsi-fungsi rangkap (fungsi yang lebih rumit), misal f(x) = sin 3x , f(x) = (2x2 - 5x + 10) . Untuk keperluan ini dibutuhkan aturan baru, yaitu aturan rantai.

Jika y fungsi dalam u, yang didefinisikan y = f(u), f '(u) ada dan u fungsi dalam x yang didefinisikan u = g(x), g'(x) ada, maka y fungsi dalam x dan = .

Secara simbolik:

y = f(u) dengan u = g(x) dan f '(u), g'(x) ada ⇒ y = f(g(x)) dan = .

Bukti : ∆ y = f(u + ∆u) - f(u) dan ∆u = g(x+ ∆x) - g(x)

dengan ∆x ⇒ 0, ∆y ⇒ 0 dan ∆u ⇒ 0

jika ∆u ≠ 0, maka ε = - ∆u untuk ε ϵ R dan ε ≠ 0

diperoleh ∆y = ∆u + ε ∆u

= + ε kedua ruas dibagi dengan ∆x

, atau

= . + ε , ( ∆x → 0) ⇒ ( ε → 0)

*= .*  ∎

Cara lain:

Bukti: Misal F = g o f, maka F'(x) = (g o f)'(x) merupakan limit untuk h → 0

dari

=

Misal y = f(x), dan misal k = f(x+h) - f(x), maka

f(x+h) = f(x) + k, diperoleh

=

Jika k ≠ 0, maka

= .

= .

= (. )

= . )

= . )

F'(x) = . )

diketahui kedua faktor mempunyai limit, maka

F'(x) = . f ' (x) )

Karena f '(x) ada, berlaku

= f(x) ⇒ = 0 , mengakibatkan

=

diketahui g terdefirensialkan pada y = f(x), sehingga

= g'(y)

Dengan demikian

F'(x) = g'(y) f'(x) atau

= g'(f(x)) f '(x)

∆F = g o f, maka F'(x) = (g o f)'(x) ∎

Dengan adanya aturan rantai, maka sebagian besar dari aturan aturan yang dibahas di atas dapat diperluas. Berikut dibahas perluasannya.

**3.11. Perluasan Teorema Aturan Pangkat**

Jika f(x) = xn , dengan n bilangan bulat positif, maka f '(x) = n xn-1.

Perluasannya:

Jika f(x) = g(x)n , dengan n bilangan bulat positif, maka f '(x) = n g(x)n-1 g'(x).

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = g(x)n menjadi y = un

= n un-1 dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= n un-1.g'(x) atau

= n. g(x)n-1. g'(x) ∎

***Contoh*** 1: Tentukan f '(x) dari f(x) = (3x2 - 2x + 10)5

Penyelesaian:

f '(x) = 5(3x2 - 2x + 10)5-1 . (3x2 - 2x + 10)’

= 5 (3x2 - 2x + 10)4. ( 6x - 2 )

= (30x - 10)(3x2 - 2x + 10)4

***Contoh 2***: Tentukan f '(x) dari f(x) = []4

Penyelesaian: f '(x) = 4 []3 . [] .

= 4 []3 . .

= 4 .

= 4 .

= 4 .

= 4 .

**3.12. Perluasan Turunan Fungsi Trigonometri**

**3.12.1. Perluasan Turunan Fungsi Sinus**

Jika f(x) = sin x, maka f '(x) = cos x

Perluasannya

Jika f(x) = sin g(x), maka f '(x) = g'(x) cos g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = sin g(x) menjadi y = sin u

= cos u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= cos u .g'(x) atau

f(x)' = cos g(x) . g'(x) ∎

**3.12.2. Perluasan Turunan Fungsi Cosinus**

Jika f(x) = cos x, maka f'(x) = - sin x

Perlusannya:

Jika f(x) = cos g(x), maka f '(x) = - g'(x) sin g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = cos g(x) menjadi y = cos u

= - sin u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= - sin u .g'(x) atau

f(x)' = - sin g(x) . g'(x) ∎

**3.12.3. Perluasan Turunan Fungsi Tangen**

Jika f(x) = tan x, maka f '(x) = sec2 x

Perluasannya

Jika f(x) = tan g(x), maka f'(x) = g'(x) sec2 g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = tan g(x) menjadi y = tan u

= sec2 u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= sec2 u .g'(x) atau

f(x)' = sec2 g(x) . g'(x) ∎

**3.12.4. Perluasan Turunan Fungsi Cotangen**

Jika f(x) = cot x, maka f '(x) = -csc2x

Perluasannya

Jika f(x) = cot g(x), maka f'(x) = - g'(x) csc2 g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = cot g(x) menjadi y = cot u

= - csc2 u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= -csc2 u .g'(x) atau

= - g'(x) . csc2 g(x) ∎

**3.12.5. Perluasan Turunan Fungsi Secant**

Jika f(x) = sec x, maka f '(x) = sec x . tan x

Perluasannya

Jika f(x) = sec g(x), maka f '(x) = g'(x) (sec g(x) . tan g(x))

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = sec g(x) menjadi y = sec u

= sec u . tan u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= (sec u . tan u) . g'(x) atau

= g'(x) . sec u . tan u ∎

∴ f(x) = sec g(x) ⇒ D(sec g(x)) = g'(x) (sec g(x) . tan g(x))

**3.12.6. Perluasan Turunan Fungsi Cosecant**

Jika f(x) = csc x, maka f'(x) = - csc x . cot x

Perluasannya

f(x) = csc g(x) ⟶ f'(x) = - g'(x) (csc g(x).cot g(x))

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = csc g(x) menjadi y = csc u

= - csc u . cot u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= - csc u . cot u . g'(x) atau

= - g'(x) . csc u . cot u ∎

∴ f(x) = csc g(x) ⟶ f'(x) = - g'(x) (csc g(x). cot g( x))

***Contoh 1***: Tentukan f '(x) dari f(x) = sin 3x + cos 2x

Penyelesaian: f '(x) = cos 3x . (3x) ' + (-sin 2x) . (2x) '

= 3 cos 3x - 2 sin 2x

***Contoh 2***: Tentukan f '(x) dari f(x) = tan2 (3x - 2)

Penyelesaian: f '(x) = (2 tan (3x-2) sec2 (3x-2)) (3x-2)

= 2 tan (3x-2) sec2 (3x-2) . 3

= 6 tan (3x-2) sec2 (3x-2)

***Contoh 3***: Tentukan f '(x) dari f(x) = sec3 x1/2

Penyelesaian: f '(x) = 3 sec2 x1/2 (sec x1/2)

= 3 sec2 x1/2 . sec x1/2. tan x1/2 ( x1/2 )

= 3 sec3 x1/2. tan x1/2 . 1/2 x-1/2

= sec 3 x1/2 tan x1/2

**3.13. Perluasan Turunan Fungsi Logaritmis**

Jika f(x) = alog x, maka f '(x) =

Perluasannya

Jika f(x) = alog g(x), maka f '(x) = g'(x)

Bukti : Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = alog g(x) menjadi y = alog u

= dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= . g'(x) atau

= . g'(x) ∎

**3.13.1. Perluasan Turunan Fungsi Logaritmis Naturalis**

Jika f(x) = ln x, maka f '(x) =

Perluasannya

Jika f(x) = ln g(x), maka f '(x) =

Bukti : Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = ln g(x) menjadi y = ln u

= dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= . g'(x) atau

= . g'(x) ∎

**3.14. Perluasan Turunan Fungsi Eksponensial**

Jika f(x) = ax , maka f '(x) = ax ln a

Perluasannya

Jika f(x) = ag(x) , maka f '(x) = ag(x) ln a. g'(x)

Bukti : Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = ag(x) menjadi y = au

= au ln a dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= au ln a . g'(x) atau

= ag(x) ln a. g'(x) ∎

**3.14.1. Perluasan Turunan Fungsi Eksponensial Dengan Bilangan Pokok e**

Jika f(x) = ex , maka f '(x) = ex

Perluasannya

Jika f(x) = eg(x) , maka f'(x) = g'(x).eg(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = eg(x) menjadi y = eu

= eu dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= eu . g'(x) atau

= eg(x) . g'(x) ∎

***Contoh 1***: Tentukan f '(x), jika f(x) = log (3x2 - 5)

Penyelesaian: f '(x) = log e (3x2 - 5)

= log e

***Contoh 2***: Tentukan f '(x), jika f(x) = ln (x3 + 2)(2x2 - 5)

Penyelesaian: f (x) = ln (x3 + 2)(2x2 - 5)

= ln (x3 + 2) + ln (2x2 - 5)

f '(x) = (x3 + 2) + (2x2 - 5)

= +

***Contoh 3***: Tentukan f '(x), jika f(x) = xx

Penyelesaian: Cara 1 (menggunakan sifat logaritma)

f(x) = xx ⟶ y = xx kedua ruas dioperasikan dengan ln

ln y = ln xx atau

ln y = x ln x ⇒ ln y =

⇔ . = x . + ln x

⇔ . = x . + ln x . 1

⇔ . = (1 + ln x )

⇔ = (1 + ln x ). y ; kedua ruas dikali dengan y

atau ⇔ = xx(1 + ln x ) ∎

Cara 2

f(x) = xx dapat ditulis dalam bentuk f(x) = ex ln x

f '(x) = (x ln x) . ex ln x

= (x . 1/x + ln x)(ex ln x)

= (1 + ln x)( ex ln x ) atau

= xx (1 + ln x) ∎

**3.15. Perluasan Turunan Fungsi Hiperbolik**

**3.15.1. Perluasan Turunan Fungsi Sinus Hiperbolik**

Jika f(x) = sinh x, maka f '(x) = cosh x

Perluasannya

Jika f(x) = sinh g(x), maka f '(x) = g'(x).cosh g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = sinh g(x) menjadi y = sinh u

= cosh u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= cosh u . g'(x) atau

= g'(x) . cosh g(x) ∎

**3.15.2. Perluasan Turunan Fungsi Cosinus Hiperbolik**

Jika f(x) = cosh x, maka f '(x) = sinh x

Perluasannya

Jika f(x) = cosh g(x), maka f '(x) = g'(x).sinh g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = cosh g(x) menjadi y = cosh u

= sinh u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= sinh u . g'(x) atau

= g'(x . sinh g(x)) ∎

**3.15.3. Perluasan Turunan Fungsi Tangen Hiperbolik**

Jika f(x) = tanh x, maka f '(x) = sech2 x

Perluasannya

Jika f(x) = tanh g(x), maka f '(x) = g '(x). sech2 g( x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = tanh g(x) menjadi y = tanh u

= sech2 u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= sech2 u . g'(x) atau

= g'(x) . sech2 g(x) ∎

**3.15.4. Perluasan Turunan Fungsi Cotangen Hiperbolik**

Jika f(x) = coth x, maka f '(x) = - csch2 (x)

Perluasannya

Jika f(x) = coth g(x), maka f '(x) = - g'(x) . csch2 g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = coth g(x) menjadi y = coth u

= - csch2 u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= - csch2 u . g'(x) atau

= - g'(x) csch2 g(x) ∎

**3.15.5. Perluasan Turunan Fungsi Secant Hiperbolik**

Jika f(x) = sech x, maka f '(x) = - sech x . tanh x

Perluasannya

f(x) = sech g(x) → f'(x) = - g'(x) sech g(x).tanh g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = sech g(x) menjadi y = sech u

= - sech u.tanh u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= - sech u.tanh u . g'(x) atau

= - g'(x) sech u.tanh u atau

= - g'(x) sech g(x) . tanh g(x) ∎

**3.15.6. Perluasan Turunan Fungsi Cosecant Hiperbolik**

Jika f(x) = csch x, maka f'(x) = - csch x . ctgh x

Perluasannya

f(x) = csch g(x) ⇒ f '(x) = - g'(x) csch g(x). ctgh g(x)

Bukti: Misal f(x) = y dan g(x) = u, sehingga

f(x) = csch g(x) menjadi y = csch u

= - csch u . ctgh u dan = g'(x)

dengan aturan rantai diperoleh

= - csch u . ctgh u . g'(x) atau

= - g'(x) csch u . ctgh u atau

= - g'(x) csch g(x) . ctgh g(x) ∎

***Contoh 1***: Tentukan f '(x), jika f(x) = sinh 3x

Penyelesaian: f '(x) = cosh 3x d/dx 3x

= 3 cosh 3x

***Contoh 2***: Tentukan f'(x), jika f(x) = ctgh 1/x

Penyelesaian:

f '(x) = - csch2 1/x . d/dx 1/x

= (csch2 1/x)

***Contoh 3***:Tentukan f '(x), jika f(x) = 1/3 sinh 2x - 1/2 x

Penyelesaian: f '(x) = 1/3 ( cosh 2x d/dx 2x ) - 1/2

= 2/3 cosh 2x - 1/2

***Contoh 4***: Tentukan f '(x) dari f(x) = x sech x2

Penyelesaian:

f '(x) = x ((- sech x2 tanh x2 ) d/dx x2) + sech x2 . 1

= - 2 x2 (sech x2 tanh x2 ) + sech x2